القسم: رياضيات — الفصل الأول

السنة: الثالثة — المادة: ميكانيك /2/

المحاضرة: الأولى عملي

قوانين للحل: عزم العطالة:

$$I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}$$

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

$$I_o = I_{xy} + I_z$$

أما في حالة جسم الكتلة

$$I_o = \int (x^2 + y^2 + z^2)\,dm$$

ملاحظة:

عندما يكون لدينا طول يكون التكامل أحادي أما عندما تكون مساحة يكون التكامل ثنائي وإذا كان حجم يكون التكامل ثلاثي

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\,dm$$

إذا كان لدينا جسم [illegible] تكامل ومحصور [illegible]

في المستوي تتحقق العلاقة $I_z = I_x + I_y$

$$X(c) = \frac{\int x\,dm}{m}, \quad Y(c) = \frac{\int y\,dm}{m}, \quad Z(c) = \frac{\int z\,dm}{m}$$

مثال: لدينا قضيب متجانس طوله AB = ℓ كتلته m أوجد احداثيات مركز الكتل

1) عزم العطالة بالنسبة لأحد طرفيه

2) عزم العطالة بالنسبة لمركز كتلته

الحل :

لدينا $Oxyz$ جملة محاور إحداثية ديكارتية

حيث Ox ينطبق على استقامة القضيب و

Oy عمودي عليها و Oz عمودي على المستوي Oxy

$$X(c) = \frac{\int_0^l x\, dl}{l} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l}{l} = \frac{l}{2}$$

$$y(c) = \frac{\int y\, dl}{l} = 0 \quad , \quad z(c) = 0$$

⇐ إحداثيات مركز الكتلة $c(\frac{l}{2}, 0, 0)$

$$dm = \rho\, dl \Rightarrow m = \rho l$$

(2 $I_A = I_y = \int (x^2 + z^2)\, dm$

$$I_y = \rho \int_0^l x^2\, dl = \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{\rho l^3}{3} = \frac{m l^2}{3} \quad ; \quad z = 0$$

$z = 0$ لأن القضيب واقع في المستوي Oxy

ملاحظة:

عزم العطالة بالنسبة لطرفي القضيب يساوي عزم العطالة بالنسبة لمحور عمودي على طرفي القضيب

(3 نرسم محاور ديكارتية من جديد ولتكن

جملة محاور جديدة $Cxyz$

Cy عمودي على القضيب في منتصفه

Cx تنطبق على استقامة القضيب بحيث أن $-\frac{l}{2} \le x \le \frac{l}{2}$

$$I_c = \int x^2\, dm = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\, dx = \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m l^2}{12}$$

مثال: سلك متجانس على شكل نصف دائرة في المستوي oxy مركزه o ونصف قطره R وكتلته m

1) أوجد احداثيات مركز الكتلة؟

2) أوجد عزم العطالة بالنسبة لمحور يمر على أحد أطرافه؟

3) أوجد عزم العطالة بالنسبة لمركز الكتلة

4) أوجد عزم العطالة بالنسبة لـ o

$dl = R\,d\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$

الحل:

$oxyz$ جملة متعامدة ديكارتية بحيث إن

ox و oy منطبقان على قطره و oz عمودي على مستوي السلك في (o)

1) هنا نستخدم الاحداثيات القطبية لأن الجسم دائري حيث

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$x_c = \frac{\int x\,dl}{l} = \frac{\int_0^{\pi} R^2\cos\theta\,d\theta}{\pi R} = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi} = 0$$

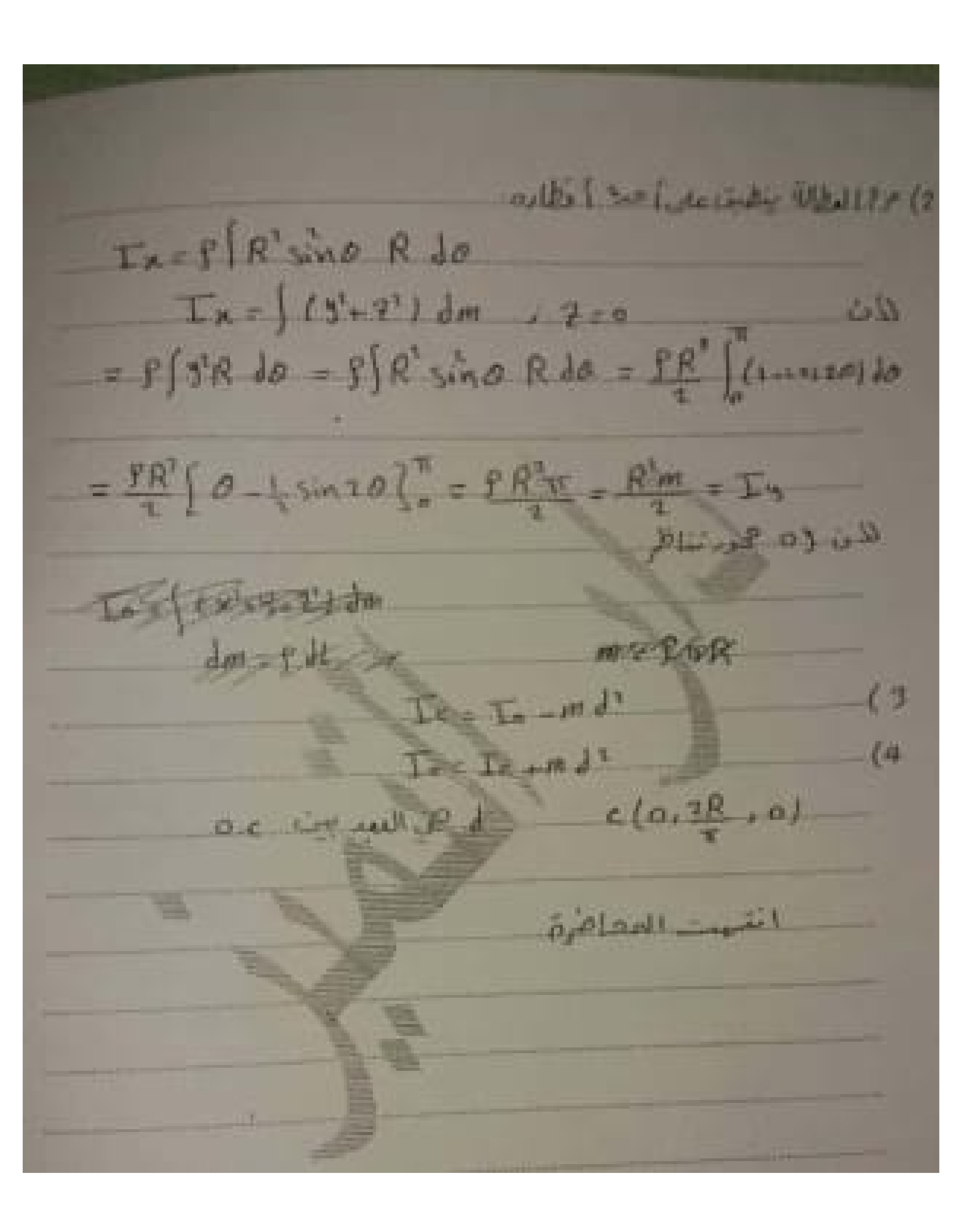
$$y_c = \frac{\int y\,dl}{l} = \frac{\int_0^{\pi} R^2\sin\theta\,d\theta}{\pi R} = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \frac{R}{\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{R}{\pi}(1+1) = \frac{2R}{\pi}$$

$z_c = 0$ لأنه واقع في المستوي xoy

$$\Rightarrow C\left(0, \frac{2R}{\pi}, 0\right)$$

بما أن oy محور تناظر فإن مركز الكتلة سيقع على المحور oy



(2 [illegible]

$I_x = \rho \int R^2 \sin^2\theta \; R \, d\theta$

الآن $I_x = \int (y^2+z^2)\, dm \quad , \; z=0$

$= \rho \int y^2 R \, d\theta = \rho \int R^2 \sin^2\theta \; R \, d\theta = \frac{\rho R^3}{2} \int_0^{\pi} (1-\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{\rho R^3}{2} \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{\rho R^3 \pi}{2} = \frac{R^2 m}{2} = I_y$

الآن [illegible]

$dm = \rho \, dl \qquad m = \rho \pi R$

$I_c = I_o - m d^2$ (3

$I_{[illegible]} = I_c + m d^2$ (4

d البعد بين $o.c \qquad c\left(0, \frac{2R}{\pi}, 0\right)$

انتهت المحاضرة